PROGRAMMA PROVVISORIO DI ANALISI MATEMATICA 2
INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA, A.A. 2020-21
DOCENTE MICHIEL BERTSCH

Libro di testo di riferimento: M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, Analisi Matematica, seconda edizione, McGraw Hill (2011)

Calcolo differenziale di funzioni di più variabili in insiemi aperti

- §10.1. funzione a valori scalari o vettoriali di più variabili, grafico;
- §10.2. dominio naturale;
  spazio euclideo (norma, distanza, prodotto scalare, base canonica/ortonormale);
  intorno (sferico), punto isolato, punto di accumulazione;
  insieme limitato;
  teorema di Bolzano-Weierstrass, punto interno/esterno/di frontiera;
  insieme aperto/chiuso;
  l'elemento infinito e i suoi intorni;
  disuguaglianza di Young;
- §10.3. funzioni scalari: max/min assoluto o globale;
  max/min relativo o locale;
  sup/inf;
  limite;
  funzione continua;
  il limite di un campo vettoriale $f = (f_1, ..., f_m)$ si riduce ai limiti dei singoli componenti scalari $f_1, ..., f_m$;
- §10.3.1. successioni in $\mathbb{R}^n$: successioni limitate, convergenti;
  insiemi compatti, caratterizzazione di insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$ come insiemi chiusi e limitati;
- §10.3.2. teoremi su funzioni continue definite su un insieme compatto;
- §10.3.3. curve parametrizzate in $\mathbb{R}^n$: funzioni continue da un intervallo reale a $\mathbb{R}^n$;
- §10.4.1. continuità di "composizioni di funzioni continue";
- §10.4.2. esempi di funzioni discontinue;
- §10.4.3. esempi del calcolo dei limiti, l'utilizzo delle coordinate polari;
- §11.1. derivata direzionale, interpretazione geometrica;
  derivata parziale, gradiente, funzione derivabile in un punto;
  calcolo delle derivate parziali, proprietà elementari delle derivate parziale;
- §11.2. funzioni derivabili non sono necessariamente continue;
  funzione differenziabile;
  miglior approssimazione lineare di una funzione;
  teorema fondamentale sulle funzioni differenziabili: continuità, derivabilità, esistenza di derivata direzionale (con formula);
  direzione di massima crescita;
  piano tangente al grafico di una funzione differenziabile di 2 variabili;
  equazione del piano tangente;

Date: September 20, 2020.

criterio sufficiente per la differenziabilita' (teorema del differenziale totale) in termini della continuita' delle derivata parziali;
- §11.2.1. teorema del Valor Medio sui segmenti;
- §11.2.2. scambio di limite e integrale e di derivata e integrale;
- §11.3. derivate seconde (direzionali, parziali);
  funzioni due volte differenziabili in un punto/insieme;
  teorema di Schwarz (derivate miste);
  matrice hessiana (simmetrica, con autovalori reali);
  formula per le derivate seconde direzionali con la matrice hessiana;
- §11.4. polinomio di Taylor di grado due (Peano, resto di Lagrange);
  riduzione al caso di funzioni di 1 variabile tramite derivate direzionali;
  l'errore di approssimazione; formula di Lagrange;
- §11.5. insieme convesso;
  funzioni (strettamente) convesse/concave definite su insiemi convessi;
  esempio di funzione non convessa ne' concava;
  proprietà delle funzioni convesse;
  l'utilizzo degli autovalori della matrice hessiana per deteminare convessità/concavità (stretta);
  il caso particolare di funzioni di due variabili (determinante/traccia della matrice hessiana);
- §11.6. punto critico (o punto stazionario);
  punti di estremo libero di una funzione differenziabile sono necessiamente punti critici;
  punto di sella;
  come utilizzare la matrice hessiana per studiare la natura di un punto critico di una funzione due volte differenziabile;
- §11.7. campi vettoriali: differenziabilità, la matrice jacobiana, regola delle catena come prodotto di matrici jacobiane.

Integrali curvilinei

- §12.1-2-3. definizione di curva parametrizzata;
  sostegno e verso, orientazione;
  curve piane, curve semplici, curve chiuse, curve di Jordan;
  derivata, curva di classe C^1, C^1 a tratti;
  regola della catena (T. 12.4);
  curva regolare, regolare a tratti, retta tangente a una curva regolare;
  cambiamento di parametrizzazione;
  curve equivalenti (con lo stesso verso, con verso opposto);
  integrali di funzioni vettoriali;
  curve rettificabili;
  lunghezza curva di classe C^1 (non dipende dalla parametrizzazione);
  parametro d'arco;
  integrali curvilinei di prima specie, indipendenza della parametrizzazione;
- §12.4. Integrali curvilinei di seconda specie:
  definizione, motivazione fisica (lavoro esercitato da un campo di forze F);
  indipendenza da parametrizzazioni con lo stesso verso;
  versore tangente T, legame tra integrali di prima e seconda specie;
  concetto formale di forma differenziale associata $\omega = F_1 dx_1 + ... + F_n dx_n$;
  forma differenziale esatta (cf. campo di forze conservativo);

funzione potenziale $U(x)$ ("$= -$ energia potenziale");
$\int_\gamma \omega = U(\text{punto finale}) - U(\text{punto iniziale})$ (regola della catena!);
caraterizzazione di forme differenziali esatte;
forme differenziali chiuse;
forme differenziali chiuse sono esatte ma non viceversa;
calcolo di una funzione potenziale;
il caso $n = 3$: rotore/curl, campi vettoriali irrotazionali;
insiemi semplicemente connesse;
omotopia di due curve;
in un insieme semplicemente connesso: ω esatta $\Leftrightarrow$ ω chiusa.
(§12-5 non fa parte del programma).

Funzioni implicite, estremi vincolati, estremi su compatti

- premessa: la matrice jacobiana (§11.7) e la regola della catena come prodotto di due matrici jacobiane (teorema 11.29)
- §13.1 il concetto di linearizzazione intorno a un punto;
  teorema dell'inversione locale;
  teorema delle funzioni implicite;
  curve e insieme di livello;
- §13.2 massimi e minimi vincolati;
  punto regolare del vincolo;
  punto critico vincolato;
  il metodo diretto nel caso di $n = 2$ variabili e $m = 1$ vincolo;
  il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel caso $n = 2$, $m = 1$;
- §13.3-5.
  estremi vincolati di funzioni su insiemi compatti con interno non vuoto;
  moltiplicatori di Lagrange: i casi $n = 3, m = 1$; $n = 3$, $m = 2$.

Integrali multipli

- §14.1. integrali doppi su rettangoli:
  costruzione (suddivisione, somma inferiore/superiore);
  definizione di integrabilità, criterio di integrabilità;
  integrabilità di funzioni continue;
  proprietà elementari, valor medio di una funzione;
  riduzione a due integrali semplici;
- §14.2. integrali su domini generali:
  definizione di integrabilità;
  interpretazione geometrica dell'integrale doppio (volume);
  insiemi misurabili, misura/area di un insieme misurabile;
  definizione e caratterizzazione di insiemi di misura nulla;
  esempi di insiemi di misura nulla (grafico di una funzione, curva);
  integrabilità di funzioni continue e limitate su domini misurabili;
- §14.3. domini semplici rispetto all'asse x o y;
  formule di riduzione in domini semplici;
  interpretazione geometrica (sezione, area...);
  calcolo di integali doppi;
- §14.3. cambiamento di variabile di integrazione;
  il "fattore correttivo" $|\det J_\Psi|$;
  coordinate polari, calcolo di integrali;

- §14.4. l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
  (per il resto gli integrali doppi impropri non fanno parte del programma)
- §14.5. integrali tripli:
  teoria analoga a quella degli integrali doppi;
  formule di riduzione (per fili e per strati);
  applicazioni (massa totale, baricentro, temperatura media...);
  solido di rotazione;
  cambiamento di variabili di integrazione;
  coordinate cilindriche e sferiche;
  calcolo di integrali.

Superfici in $\mathbb{R}^3$

- §15.1. superficie elementare, parametrizzazione;
  esempi (superficie cartesiana, sfera, toro, cono, cubo);
  punti interni, bordo;
  punti regolari, piano tangente, versore normale;
- §15.2. area di una superficie regolare;
  integrale di superficie di una funzione
- §15.3. superfici elementare orientabile;
  esempio di una superficie non orientabile: nastro di Möbius;
  flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata;
- §15.4. orientazione del bordo di superficie elementari:
  il caso di una superficie elementare invertibile;
- §15.5. superfici composte (senza definizione precisa);
  orientazione di una superficie orientabile e del suo bordo;
- §16.1. operatori differenziali divergenza e rotore;
  $rotv = ((v_3)_x - (v_2)_z, (v_1)_z - (v_3)_x, (v_2)_x - (v_1)_y)$;
- §16.2. formule di Green in domini semplici e in domini più generali;
  versore tangente positivo al bordo, normale esterna;
  teoremi della divergenza e del rotore nel piano;
- §16.3. teorema della diverenza nello spazio;
  interpretazione della divergenze di un flusso;
  l'equazione di continuità:
  legge di conservazione di massa, equazione del calore;
- §16.4. il teorema di Stokes;
  interpretazione del rotore di un campo vettoriale in un punto.

Cenno ai numeri complessi

- §1.4. definizione numeri complesse;
  parte reale/immaginaria: $z = x + iy$;
  calcolo di $1/(x + iy)$;
  modulo e argomento;
  rappresentazione geometrica: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi = \arg z + 2k\pi$;
  modulo e argomento del prodotto: prodotto dei moduli ($|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$), somma degli argomenti;
  rappresentazione esponenziale: $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg z + 2k\pi$;
  radici di polinomi quadratici: formula della radice.

Equazioni differenziali

- §17.1. equazioni lineari del primo ordine;
  equazione omogenea $y' = a(x)y$;
  equazione non omogenea $y' = a(x)y + b(x)$;
  teorema di esistenza e unicità;
  struttura della soluzione generale;
  problema di Cauchy;
  variazione della costante (metodo generale);
  metodo ad hoc per ricavare una soluzione (in casi semplici);
- §17.2.1. equazione del primo ordine a variabili separabili;
  esempio di non unicità;
  esempio di una soluzione che non esiste "globalmente";
- §17.2.2. teorema di esistenza locale e unicità per equazioni del primo ordine;
  teorema di esistenza globale per equazioni del primo ordine;
- §17.2.3. teorema di esistenza e unicità per sistemi di equazioni del primo ordine;
  equazioni di ordine n: riduzione a un sistema di n equazioni del primo ordine;
- §17.3. equazioni lineari del secondo ordine;
  soluzioni linearmente indipendenti;
  criterio del determinante wronskiano;
  struttura della soluzione generale dell'equazione (omogonea, non-omogenea);
- §17.3.1. equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti;
  equazione caratteristica (3 casi diversi);
- §17.3.2. equazioni lineari non omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti;
  variazioni delle costanti;
  metodo ad hoc per ricavare una soluzione (in casi semplici);
- §17.4. non fa parte del programma;
- §17.5. riduzione dell'ordine per $y'' = f(x, y')$ (f non dipende da y);
  metodo di D'Alembert per equazioni lineari omogenee;
  equazione di Eulero;
  equazioni autonome $y'' = f(y, y')$ (f non dipende da x);
  metodo di Frobenius.